Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

No. 20ο Date 12/12/2016

Άσκηση

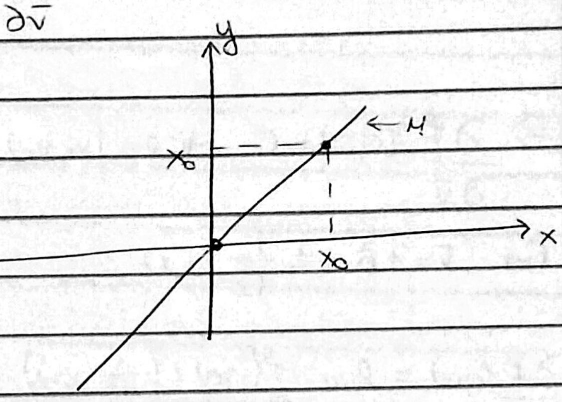
Έστω $M=\{(x,x)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq 0\}$ και $f(x,y)=\begin{cases} e^x-1, & (x,y)\in M \\ 0, & (x,y)\notin M\end{cases}$

Δείξτε: α) f μερικώς διαφ αν και μόνο αν $(x,y)\notin M$

β) $\forall \bar v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ με $\|\bar v\|=1$ $\exists \frac{\partial}{\partial \bar v} f(0,0)$

γ) $\exists \bar v\in\mathbb{R}^2$ με $\|\bar v\|=1$: $\frac{\partial}{\partial\bar v} f(0,0)\neq \nabla f(0,0)\cdot\bar v$

Λύση



Ειδικότερα $f(0,0)=0$

$f(x_0,x_0)=e^{x_0}-1$, $x_0\neq 0$

Η f είναι συνεχής στο (x_0,x_0)?

Δηλ. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

Δηλ. $\forall (x_\nu,y_\nu)\to(x_0,x_0)$: $f(x_\nu,y_\nu)\to f(x_0,x_0)$

Όχι, δεν είναι συνεχής

αφού πχ. $f(\underbrace{x_0,\ x_0-1/\nu}_{\to (x_0,x_0)=0}) \not\to \underbrace{f(x_0,x_0)}_{\neq 0}$

Επίσης η f δεν είναι μερικώς διαφ. ως προς y στο (x_0,x_0)

αφού $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,x_0)=\tilde f'(x_0)$ (για την $\tilde f(y)=f(x_0,y)$ $\forall y\in\mathbb{R}$)

δεν υπάρχει μιας και η $\tilde f$ είναι <u>μη</u> συνεχής στο x_0

Αντίστοιχα $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

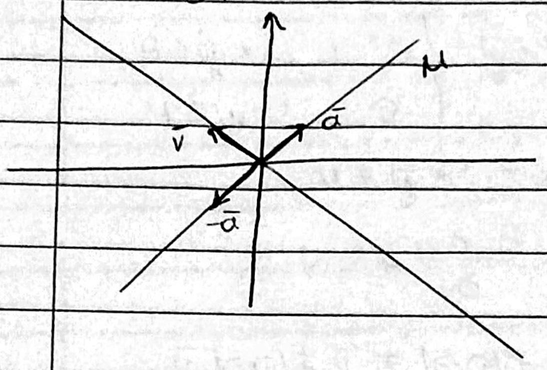
$\Rightarrow$ Για τα σημεία $(x,y)\in M$ η f δεν είναι μερικώς διαφορίσιμη

Για τα σημεία $(x,y)\in\mathbb{R}^n\setminus\bar M=\mathbb{R}^n\setminus\{(x,x)\in\mathbb{R}^2: x\in\mathbb{R}\}$

η f είναι μερικώς διαφορίσιμη

Στο σημείο $(0,0)\notin M$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=g'(0)$ με $g(x)=f(x,0)$

$\Rightarrow \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$ Αντίστοιχα, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$



$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(v_1,v_2)) - f(0,0)}{h} = F'(0)$$

με $F(h) = f(\underbrace{(0,0)+h(v_1,v_2)})$, $h\in\mathbb{R}$

Η ευθεία που περνάει από το (0,0) και έχει κατεύθυνση $\bar{v}$.

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) = 0 \quad \forall \bar{v} = (v_1, v_2) \neq \pm\bar{a} = \pm(a_1, a_2) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1).$$

Για $\bar{v} = \pm\bar{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0) \pm h\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)) - f(0,0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ (h\neq 0)}} \frac{f(\pm h\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{\pm h\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1}{\frac{h}{\sqrt{2}}}$$ Άρα $$\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{h\to 0} \frac{e^{\pm h} - 1}{h} = \pm 1$$

γ) $\nabla f(0,0) = (0,0) \Rightarrow \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n$

$\nabla f(0,0)\cdot\bar{v} = 0 \neq \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0)$ διότι $\bar{v} = \pm\bar{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

Είχαμε δει ότι:

αν f διαφ. στο (0,0), τότε $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) = \underbrace{\nabla f(0,0)\cdot\bar{v}}_{= Df(0,0)}$ $\forall \bar{v}$

Συνεπώς, το (γ) δείχνει ότι η f δεν είναι διαφ. στο (0,0)

Παρόλο κι αν είναι διαφ. κατά κατεύθυνση σε κάθε κατεύθυνση $\bar{v}$ στο (0,0).